28/3/16

$m_A(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του $A \in K$
i) $m_A(x)$ μονικό
ii) Ισχύει $m_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$
iii) Είναι ελαχίστου βαθμού δηλ. αν $g(x) \neq 0$ και $g(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$ τότε $\deg m_A(x) \leq \deg g(x)$

Θεώρημα (Cayley - Hamilton): $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$
Πόρισμα: $m_A(x) \mid \chi_A(x)$
(Το ελάχιστο διαιρεί το χαρακτηριστικό)

$m_f(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο της $f: V \to V$
i) $m_f(x)$ μονικό
ii) Ισχύει $m_f(x) = \mathbb{O}_{n\times n}$
iii) Είναι ελαχίστου βαθμού (δηλ. αν $g(x) \neq 0$ και $g(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$ τότε $\deg m_f(x) \leq \deg g(x)$

Θεώρημα Τα πολυώνυμα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.
Απόδειξη
Έστω λ ρίζα του $m_A(x) \Rightarrow m_A(\lambda) = 0$
Γνωρίζουμε όμως ότι $m_A(x) \mid \chi_A(x)$ δηλαδή $\chi_A(x) = q(x) \cdot m_A(x)$ τότε $\chi_A(\lambda) = q(\lambda) \cdot \underbrace{m_A(\lambda)}_{0} = 0$
Άρα το λ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$

Έστω λ ρίζα του $\chi_A(x) \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του πίνακα $A \Rightarrow \exists\ X \neq 0,\ X \in K^{n\times 1}$ τέτοια ώστε $AX = \lambda X$. Έστω $m_A(x) = x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_0$

$m_A(A) =$ ήμαρχ συνθήκη $A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$

$$\left(A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right) \cdot X = O_{n\times n} \cdot \overset{n\times 1}{X} = O_{n\times 1}$$

$$A^m \cdot X + \alpha_{m-1} A^{m-1} \cdot X + \ldots + \alpha_2 A^2 \cdot X + \alpha_1 \cdot AX + \alpha_0 I X = O_{n\times 1}$$

$$* \quad \lambda^m \cdot X + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} \cdot X + \ldots + \alpha_2 \lambda^2 \cdot X + \alpha_1 \cdot \lambda \cdot X + \alpha_0 X = O_{n\times 1}$$

$$(\lambda^m + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) \cdot X = O_{n\times 1}$$

$$m_A(\lambda) \cdot X = O_{n\times 1} \qquad X \neq O_{n\times 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} {*}\text{όπου } & A^2 X = A(AX) = A\lambda X = \lambda A X = \lambda \cdot \lambda \cdot X = \lambda^2 \cdot X \\ & A^3 X = A(A^2 X) = A \cdot \lambda^2 \cdot X = \lambda^2 A X = \lambda^2 \cdot \lambda X = \lambda^3 \cdot X \end{aligned}}$$

$\Rightarrow m_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ρίζα του $m_A(x)$

Πρόταση: Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

$A = P^{-1} \cdot B \cdot P \Rightarrow m_A(x) = m_B(x)$, P αντιστρέψιμος

Απόδειξη

$m_A(x) = x^m + \alpha_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$m_B(x) = x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ldots + b_1 x + \alpha_0$

$m_B(B) = O_{n\times n} \qquad A = P^{-1} \cdot B \cdot P$

$$\begin{aligned} m_B(A) &= A^s + b_{s-1} A^{s-1} + \ldots + b_1 \cdot A + b_0 \cdot I_{n\times n} \\ &= (P^{-1} B P)^s + b_{s-1} (P^{-1} B P)^{s-1} + \ldots + b_1 P^{-1} B P + b_0 \cdot I_{n\times n} \\ &= P^{-1} B^s P + b_{s-1} P^{-1} B^{s-1} P + \ldots + b_1 P^{-1} B P + b_0 P^{-1} I_{n\times n} P \\ &= P^{-1} (B^s + b_{s-1} \cdot B^{s-1} + \ldots + b_1 \cdot B + b_0 \cdot I_{n\times n}) \\ &= P^{-1} \cdot m_B(B) \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot O_{n\times n} \cdot P \\ &= O_{n\times n} \end{aligned}$$

Άρα $m_B(A) = O_{n\times n} \Rightarrow m_A(x) \mid m_B(x)$

Όμως έχουμε $m_B(x) / m_A(x)$

$m_A(x), m_B(x)$ μονικά $\Rightarrow m_A(x) = m_B(x)$

Πρόταση: Ο πίνακας $A \in K^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλ.

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ (x-\lambda_s) \quad \text{με } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ αν } j\neq i$$

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x+1)$

$m_A(x) = (x-1)(x+1)$ ή $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$

$\Downarrow$ A διαγωνίσιμος $\qquad$ $\Downarrow$ A δεν είναι διαγωνίσιμος

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

Άσκηση 3

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & 0-x & 4 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-x)(2-x) - 6 - 8(1-x) + 2(2-x) =$$

$= -x(x-2)(x-1) - 6 - 8 + 8x + 4 - 2x$

$= -x(x^2-3x+2) - 10 + 6x$

$= -x^3 + 3x^2 - 2x - 10 + 6x$

$= -x^3 + 3x^2 + 4x - 10$

$-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_{3\times3} = O_{3\times3}$ Cayley-Hamilton

$$D = \underbrace{C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20}} - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$$

$$= C^{20}\cancelto{0}{(C^3 - 3C^2 - 4C + 10I_3)} + C^3\cancelto{0}{(-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_3)} - C^3 + 4C^2 + 5C + I_{3\times3}$$

$D = -C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$

$D = -3C^2 - 4C + 10I_3 + 4C^2 + 5C + I_3$

$D = C^2 + C + 11I_3$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \dots$$

Ασκηση 4

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-1)^{1}(1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$= (1-x)(x^2-1) = x^2 - 1 - x^3 + x = -x^3 + x^2 + x - 1$

Cayley-Hamilton $\chi_\varepsilon(\varepsilon) = O_{3\times3}$

άρα $-\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon - I_3 = O_{3\times3}$

i) Μαθηματική Επαγωγή

$n=3$ $-\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon - I_3 = O_{3\times3}$

$\Rightarrow \varepsilon^3 = \varepsilon + \varepsilon^2 - I_3$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$ δηλ. $\varepsilon^k = \varepsilon^{k-2} + \varepsilon^2 - I_3$

$n=k+1$

$\varepsilon^{k+1} = \varepsilon \cdot \varepsilon^k = \varepsilon \cdot (\varepsilon^{k-2} + \varepsilon^2 - I_3) = \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^3 - \varepsilon \underset{\text{Cayley-Hamilton}}{\overset{\text{από}}{=}}$

$\varepsilon^{k-1} + \varepsilon + \varepsilon^2 - I - \varepsilon = \varepsilon^{k-1} + \varepsilon^2 - I_3$

Άρα ισχύει για κάθε $n \geq 3$.

ii) $E^{100} = ;$

$E^3 = E^2 + E - I_{3\times 3}$ από Θεώρημα Cayley-Hamilton

$E^4 = E \cdot E^3 = E(E^2 + E - I) = E^3 + E^2 - E = E^2 + E - I + E^2 - I$

$\Rightarrow E^4 = 2E^2 - I$

$E^6 = E^4 + E^2 - I = 2E^2 - I + E^2 - I = 3E^2 - 2I$

$E^8 = E^6 + E^2 - I = 3E^2 - 2 - 2I = 4E^2 - 3I$

$E^{2n} = n \cdot E^2 - (n-1)I$

$n=1$

$E^2 = 1 \cdot E^2 - (1-1)I$ Ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$E^{2k} = k \cdot E^2 - (k-1) \cdot E$

-στη νδο: $E^{(2k+1)} = (k+1)E^2 - k \cdot I$

$E^{2(k+1)} = E^{2k} + E^2 - I$ (προηγούμενη πρόταση)

$= k \cdot E^2 - (k-1) \cdot I + E^2 - I$

$= (k+1)E^2 - k \cdot I$

Άρα ισχύει $E^{2n} = n \cdot E^2 - (n-1) \cdot I$ για κάθε n

Άρα $E^{100} = 50E^2 - 49I$